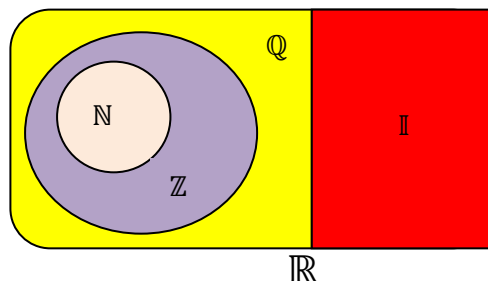




El Conjunto de los números Reales

El Conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) está formado por el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y el de los irracionales ($\mathbb{I}$). En símbolos: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Gráficamente:



De este modo, podemos hablar de completitud de la recta numérica: cada punto de la recta representa un número real, y todo número real está representado en la recta.

Radicación. Raíz n-ésima de un número

Definición: Dado un número real a y un entero positivo n , se llama raíz n -ésima de a , a otro número real b , tal que, b elevado a n es igual a a .

$$\text{En símbolos: } \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad (n \in \mathbb{N})$$

Casos particulares:

- Si n es par y $a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b$ y $b \geq 0$
- Si n es par y $a < 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \nexists$ en $\mathcal{R}$
- Si n es impar y $a \in \mathcal{R} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b$ y $b \in \mathcal{R}$

Propiedades de la Radicación

Lenguaje Formal	Ejemplos
1) Exponentes racionales $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ con $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$	1) $(\sqrt[3]{8})^4 = \sqrt[3]{8^4} = 8^{4/3}$
2) Distributiva en multiplicación y división $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ con $a, b > 0$ $n \in \mathbb{N}$	2) $\sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$ $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2}$
3) Raíz de raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4) Simplificación de radicales • Si n es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	4) Si n es par $\sqrt[6]{2^6} = 2 = 2$ $\sqrt[6]{(-2)^6} = -2 = 2$

Si n es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	Si n es impar $\sqrt[3]{5^3} = 5$ $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
5) Radicales equivalentes: Una raíz enésima positiva no varía si se multiplican o dividen por un mismo número el índice y el exponente del radicando. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n \cdot m]{a^{r \cdot m}}$ con $m, r > 0$ $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n \cdot m]{a^{r \cdot m}}$ con $m, r > 0$ y m es divisor de n y r	5) $\sqrt[5]{3^2 \cdot a^3} = \sqrt[5 \cdot 2]{(3^2)^2 \cdot (a^3)^2} = \sqrt[10]{3^4 \cdot a^6}$ $\sqrt[9]{5^3 \cdot a^6} = \sqrt[9 \cdot 3]{5^{3 \cdot 3} \cdot a^{6 \cdot 3}} = \sqrt[3]{5 \cdot a^2}$

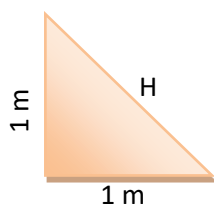
PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

✓ 1- Producto con la misma base: $a^m \cdot a^s = a^{m+s}$ Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.	Ejemplo: $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ Demostración: $3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3^2 \cdot 3^4} = 3^6$
✓ 2- Cociente con la misma base: $a^m : a^s = a^{m-s}$ Al dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y se restan los exponentes.	Ejemplo: $5^6 : 5^4 = 5^{6-4} = 5^2$ Demostración: $\frac{5^6}{5^4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^2$ (Simplifico)
✓ 3- Potencia de otra potencia: $(a^m)^s = a^{m \cdot s}$ Una potencia elevada a otro exponente, se deja la misma base y se multiplican los exponentes.	Ejemplo: $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ Demostración: $(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$ Por prop. 1 $= 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$
✓ 4- Propiedad distributiva $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ $(a : b)^s = a^s : b^s$ El exponente puede distribuirse, siempre y cuando la operación dentro del paréntesis sea una multiplicación o división. ATENCIÓN: LA POTENCIA NO PUEDE DISTRIBUIRSE EN SUMA Y RESTA	Ejemplo: $(2 \cdot 4)^3 = 2^3 \cdot 4^3$ $8^3 = 8 \cdot 64$ $512 = 512$ Ejemplo: $(6 : 3)^2 = 6^2 : 3^2$ $2^2 = 36 : 9$ $4 = 4$ Ejemplo: $(7 + 3)^2 \neq 7^2 + 3^2$ $10^2 \neq 49 + 9$ $100 \neq 58$ Ejemplo: $(5 - 4)^2 \neq 5^2 - 4^2$ $1^2 \neq 25 - 16$ $1 \neq 9$ Lo correcto es sumar o restar primero y luego elevar

2

Números Irracionales

¿Cuánto mide la hipotenusa de este triángulo rectángulo?



Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$H^2 = (1m)^2 + (1m)^2$$

$$H = \sqrt{2}m$$

Ahora bien, si utilizamos una calculadora científica para hallar $\sqrt{2}$, obtenemos 1,414213562. Si ese fuese el valor exacto de $\sqrt{2}$, al borrar el visor, volver a ingresar 1,414213562 y elevarlo al cuadrado, debería dar 2. Sin embargo, el valor que se obtiene es 1,999999999. Por lo tanto; $1,414213562 \neq \sqrt{2}$, sino que es un valor aproximado de este número.

En Internet pueden obtenerse más cifras decimales de $\sqrt{2}$, por ejemplo:

1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731

Y como puede observarse, en el desarrollo decimal no ocurre que un grupo de cifras se repita una y otra vez, o sea que no es un número periódico, por lo tanto no es racional. ***Es un número irracional.***

Los números irracionales no pueden escribirse como fracción, por lo tanto, no tienen un número finito de cifras decimales ni un período que se repita, o sea los números irracionales tienen **infinitas cifras no periódicas**

Aclaración: no son números decimales, sino que tienen una representación decimal.

Son irracionales todas las raíces de cualquier índice que no den por resultado un entero. También son irracionales todos los números que se obtienen al operar (sumar, restar, multiplicar o dividir) números irracionales con racionales.



¡Nota Importante!

- ✓ No siempre la suma de dos números irracionales es otro número irracional.
Ejemplo: $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$
- ✓ No siempre el producto de dos números irracionales es otro número irracional.
Ejemplo: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \in \mathbb{Q}$

3

Extracción de factores fuera del radical

Teniendo en cuenta las propiedades de la radicación, pueden extraerse factores fuera del radical, cuando los factores que figuran en el radicando sean potencias de exponente mayor o igual que el índice de la raíz. En algunos casos es necesario factorizar el radicando.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[2]{8} &= \sqrt[2]{2^3} && . \text{ Descomponer el ocho en factores primos.} \\
 &= \underline{\hspace{2cm}} && . \text{ Descomponer el exponente en suma de potencias de igual base.} \\
 &= \underline{\hspace{2cm}} && . \text{ Distribuir el radical en cada factor, y simplificar índice y exponente.} \\
 &= \underline{\hspace{2cm}} && . \text{ El factor 2 queda fuera del radical y éste queda reducido a su mínima expresión.}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{81a^{14}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt[3]{a^6 \cdot b^2 \cdot c^{17}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 1 **NÚMEROS REALES. IRRACIONALES**

1) Completar los espacios con cruces, según corresponda:

	N	Z	Q	I	R
0,2565656...					
$2 + \sqrt{3}$					
$\sqrt[4]{64}$					
$\sqrt{-4}$					
-5					
$\frac{3}{2}$					
2,93					
0,0102030405...					
$\frac{10}{5}$					
$\sqrt[3]{-27}$					
7 - 12					
0					
$\sqrt{8}$					

2) Calcular aplicando las propiedades correspondientes.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} =$

b) $\sqrt{125} : \sqrt{5} =$

c) $\sqrt[4]{3^6} =$

d) $\sqrt{90} : (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}) =$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} =$

f) $\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}) =$

g) $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^{12}}}} =$

h) $(\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}) : \sqrt{2} =$

3) Simplificar al máximo cada expresión, extrayendo factores del radical:

a) $\sqrt{27}$

b) $\sqrt{45}$

c) $\sqrt{252}$

d) $\sqrt[3]{32}$

e) $\sqrt{684}$

f) $\sqrt[4]{243}$

g) $\sqrt{8x^6a^3}$

h) $\sqrt[3]{8a^3x^4}$

i) $\sqrt{200a^5b^7m^6}$

j) $\sqrt[4]{10000a^8b^8y^3}$

k) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}x^{10}y^{12}z^6}$

4) Realizar las siguientes operaciones aplicando propiedades.

a) $\frac{3^{1/2} : 3}{(3^2)^{-1/2}} =$

d) $\left\{ \frac{[(-2)^3]^2}{3} \right\}^{-1} =$

f) $\sqrt[3]{\left[\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot 5^{3/2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1/3} \right]^{-2}} =$

b) $\frac{8 : 2^4}{16 \cdot 2^5} =$

e) $\left[(2^{4/9})^{1/2} \right]^{-3} : [(2^{-1})^2]^{-1/3} =$

g) $(2^{1/2})^{3/2} \cdot (\sqrt{2^5})^{-2} =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) =$

Radicales semejantes

Son radicales semejantes aquellos que poseen el mismo índice y el mismo radicando. Lo único que puede diferir es el coeficiente.

Por ejemplo: $3\sqrt{2}$ y $-5\sqrt{2}$ son radicales semejantes; 3 y -5 son los coeficientes

$-4a\sqrt[3]{b^2}$ y $-4\sqrt[3]{b^2}$ son radicales semejantes; $-4a$ y -4 son coeficientes pero distintos.

$5\sqrt{a}$ y $5\sqrt[3]{a}$ no son radicales semejantes, aunque sus coeficientes son iguales

OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

Adición y sustracción (Suma algebraica)

La suma algebraica de números irracionales semejantes, es otro número irracional semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma algebraica de todos los coeficientes. La condición para poder sumar y restar estos números es que sean semejantes

Ejemplos:

a) $3\sqrt{2} + \frac{5}{4}\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \left(3 + \frac{5}{4} - 1 + \frac{1}{2} - 4\right)\sqrt{2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$

En los cinco términos los radicales son semejantes.

Suma algebraica de coeficientes.

b) $2\sqrt[3]{81} - 4\sqrt[3]{24} =$

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____ = _____

- Los radicales no son semejantes aparentemente.
- Factorizar los radicandos.
- Descomponer los exponentes en sumas para poder extraer factores del radical.
- Distribuir los radicales en el producto y simplificar índice y exponente.
- Multiplicar los coeficientes.
- Como los radicales ya se transformaron en semejantes puedo operar con los coeficientes.

c) $\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{36} - \sqrt{8} + \sqrt{54} =$

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____

$=$ _____

- Los radicales no son semejantes aparentemente.
- Factorizar los radicandos.
- Distribuir y simplificar.
- Se asocian los radicales que no se simplificaron totalmente, porque son de igual índice.
- Los radicales no son todos semejantes.
- Agrupo los que son semejantes y opero con sus coeficientes
- La adición de radicales no semejantes queda indicada.

5) Realizar las siguientes sumas algebraicas entre radicales:

- $\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20} =$
- $\sqrt{75} - \sqrt{147} - \sqrt{675} - \sqrt{12} =$
- $\sqrt{175} - \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\sqrt{75} =$
- $\frac{2}{9}\sqrt{20} - \sqrt{45} - \frac{3}{7}\sqrt{125} - \sqrt{98} =$
- $7\sqrt{450} - \sqrt{320} - \frac{14}{3}\sqrt{80} - \frac{2}{5}\sqrt{800} =$
- $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} + \frac{3}{28}\sqrt[3]{16} =$
- $\sqrt[3]{875} - \frac{1}{7}\sqrt[3]{448} + \frac{35}{8}\sqrt[3]{189} =$
- $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{135} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2} =$
- $3x\sqrt{12x^3} - 5\sqrt{75x^5} + 4x^2\sqrt{243x} - 2x\sqrt{192x^3} =$
- $-\frac{\sqrt{27}}{2} + \frac{\sqrt{108}}{6} - 2\sqrt{48} + 2\frac{\sqrt{75}}{3} =$
- $5\sqrt[3]{16m^{10}} - 2m^2\sqrt[3]{54m^4} + 4m\sqrt[3]{128m^7} =$
- $2\sqrt{\frac{20}{169}} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 7\sqrt{\frac{80}{49}} =$

Multiplicación de números irracionales

El producto de números irracionales de igual índice es otro número irracional, o no, cuyo índice es el mismo y cuyo radicando es el producto de los radicando de cada uno de ellos.

Ejemplos:

$$a) \sqrt[5]{500} \cdot \sqrt[5]{50} = \quad b) \sqrt[3]{81a^5} \cdot \sqrt[3]{40b^2} = \quad c) (-7 + \sqrt{2}) \cdot (3 - 5\sqrt{2}) =$$

Productos Notables:

- ✓ **Cuadrado de binomio:** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$
- ✓ **Diferencia de cuadrados:** $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- ✓ **Cubo de binomio:** $(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$

Ejemplos:

$$a) (\sqrt{5} + 3)^2 = \quad b) (5 + \sqrt{3}) \cdot (5 - \sqrt{3}) = \quad c) (\sqrt{2} - \sqrt{3})^3 =$$

División en I - Racionalización de Denominadores.

Para resolver el problema de la división por un número **irracional** o una expresión algebraica irracional basta transformar el divisor o denominador **irracional** en un número **racional**. Esta operación se conoce con el nombre de **racionalización de denominador**.

Pueden presentarse tres casos.

➤ **PRIMER CASO: El denominador irracional es una raíz cuadrada**

En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, el mismo número irracional que figura en el divisor.

$$a) \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \quad b) \frac{2}{\sqrt{27}} = \quad c) \frac{2a^2}{\sqrt{243a}} =$$

➤ **SEGUNDO CASO: El denominador irracional es una raíz de otro índice distinto de dos.**

En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, una raíz de igual índice a la dada en el divisor, pero en el radicando de dicha raíz se agrega el factor conveniente de manera que se complemente para lograr igualar al índice.

$$a) \frac{1}{\sqrt[5]{45x^4y^3}} = \quad b) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{48}} =$$

➤ **TERCER CASO:** El denominador irracional es un binomio, en el que uno o ambos términos son números irracionales.

En este caso se agrega multiplicando, al numerador y denominador, el conjugado del divisor; o sea, los mismos números pero cambiado de signo el segundo término.

$$b) \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \quad a) \frac{\sqrt{6} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} =$$

6) Resolver los siguientes productos

$$a) (\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} + 2) = \quad b) (2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}) = \quad c) (\sqrt{7} - 4)^2 = \quad d) (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 =$$

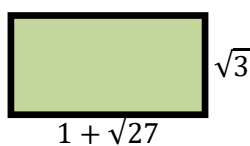
7) Resolver las operaciones indicadas, trabajando los radicales hasta su mínima expresión

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = & e) (2\sqrt{5} + 4\sqrt{8})^2 = \\ b) \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a} = & f) (\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \\ c) \sqrt{ab^3} \cdot \sqrt{ab} = & g) (\sqrt{12} - 2\sqrt{6})^2 = \\ d) (6\sqrt{5} - 3\sqrt{10})^2 = & \end{array}$$

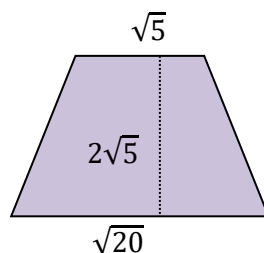
7

8) Hallar el valor exacto del perímetro y el área (en cm) de las siguientes figuras.

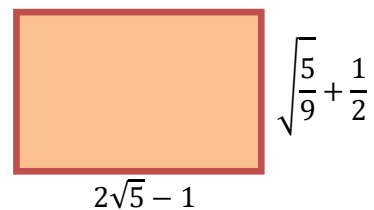
a)



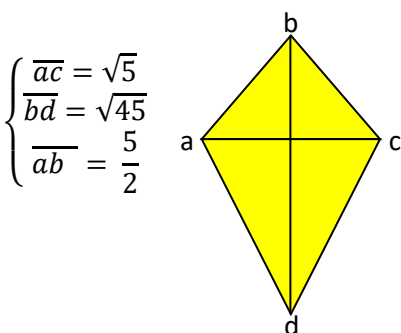
b) Isósceles



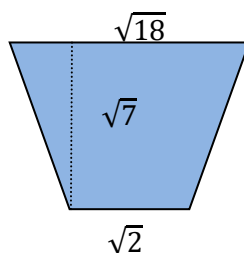
c)



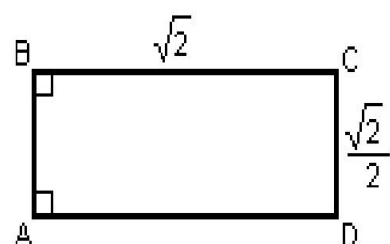
d) Romboide



e) Isósceles

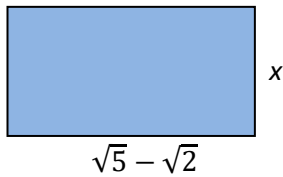


f)

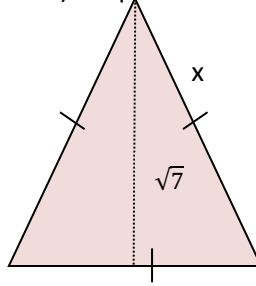


9) El área de estas figuras es igual a 1 cm^2 . Hallar el valor de la incógnita y expresar los resultados sin radicales en el denominador.

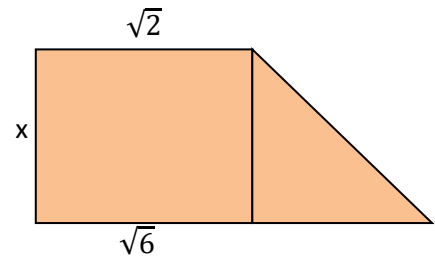
a)



b) equilátero



c)



1) Racionalizar los denominadores

a) $\frac{2}{\sqrt{7}} =$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}} =$

c) $\frac{5}{\sqrt{15}} =$

d) $\frac{12}{\sqrt{6}} =$

e) $\frac{3}{2\sqrt{5}} =$

f) $\frac{2}{4\sqrt{8}} =$

g) $\frac{2a}{\sqrt{3ax}} =$

h) $\frac{5b}{\sqrt{7b}} =$

i) $\frac{2ab}{\sqrt{8ab}} =$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} =$

k) $\frac{3}{\sqrt[3]{16}} =$

l) $\frac{2}{\sqrt[6]{16}} =$

m) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}} =$

n) $\frac{8}{\sqrt[5]{16}} =$

o) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} =$

p) $\frac{9}{\sqrt[3]{9a}} =$

q) $\frac{3}{\sqrt[6]{a^5 \cdot b^6 \cdot c^2}} =$

r) $\frac{3n}{\sqrt[3]{n^2m}} =$

s) $\frac{2}{\sqrt{3} - 11} =$

t) $\frac{5}{\sqrt{2} + 3} =$

u) $\frac{3}{4 - \sqrt{2}} =$

v) $\frac{2}{1 - \sqrt{7}} =$

w) $\frac{-5}{\sqrt{5} + 1} =$

x) $\frac{6}{2 - \sqrt{3}} =$

y) $\frac{10}{\sqrt{2} + 5} =$

z) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} =$

2) Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\sqrt{3x - 1} = 2$

b) $x^2 - \sqrt{3}x = 0$

c) $(3x - 1)^2 = 6$

d) $(x + 2\sqrt{10})(x - \sqrt{40}) = \sqrt[3]{3^6}$

e) $x - \frac{1}{3}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} - \frac{2}{1 - \sqrt{2}}$

f) $\frac{x}{\sqrt{24}} + \frac{1}{5}(\sqrt{6} - 2) = \frac{-3}{1 + \sqrt{6}}$